

Wojciech BIJAK*
Maja MANDELA**
Łukasz DELONG***



ss. 115–130

ANALIZA ZYSKOWNOŚCI PRODUKTÓW UBEZPIECZEŃ NA ŻYCIE

Celem pracy jest przedstawienie modelu analizy zyskowności produktów ubezpieczeń na życie (testu zyskowności) oraz wyników symulacji zyskowności wybranych produktów w zależności od zmiany poszczególnych parametrów uwzględnionych w modelu. Prezentowany w pracy model pozwala poddać analizie zarówno tradycyjne, jak i uniwersalne produkty ubezpieczeń na życie. Umożliwia on badanie wpływu zmian czynników zewnętrznych w stosunku do przedsiębiorstwa (takich, jak np. stopy procentowe) oraz wewnętrznych (np. parametrów określających produkty) na zyskowność poszczególnych produktów i portfela ubezpieczeniowego łącznie. Badania mogą być prowadzone w drodze analizy scenariuszy lub symulacji stochastycznej. Narzędzie do analizy zyskowności ubezpieczeń na życie zostało stworzone przy wykorzystaniu arkusza kalkulacyjnego MS Excel 2000 oraz języka Visual Basic 2000.

1. CEL I ZAKRES PRACY

1.1. WPROWADZENIE

Firmy ubezpieczeniowe są nastawione na zdobywanie i utrzymywanie pozycji rynkowej między innymi poprzez oferowanie konkurencyjnych produktów ubezpieczeniowych oraz utrzymanie jak najwyższego poziomu rentowności swojej działalności. Realizacja powyższych celów wymaga prowadzenia dokładnych analiz zyskowności oferowanych produktów oraz produktów będących dopiero w fazie projektowania. Brak takich analiz zwiększa ryzyko utraty udziału zakładu ubezpieczeń w rynku oraz może narazić firmę na poważne straty finansowe wynikające z wprowadzenia na ry-

* Szkoła Główna Handlowa w Warszawie, Instytut Ekonometrii; wojciech.bijak@sgh.waw.pl

** Ernst & Young Audit Sp. z o. o.; maja.mandela@pl.ey.com

*** Szkoła Główna Handlowa w Warszawie, Instytut Ekonometrii; lukasz.delong@sgh.waw.pl

nek nieopłacalnych produktów, a w konsekwencji zagrozić jej wypłacalności i istnieniu.

Konieczność stałego monitorowania produktów ubezpieczeń na życie została dostrzeżona przez organy regulujące rynek ubezpieczeniowy i została wprowadzona do przepisów prawa dotyczących działalności ubezpieczeniowej. Zgodnie z *Rozporządzeniem Ministra Finansów z dnia 16 grudnia 2003 roku* zakłady ubezpieczeń na życie zostały zobowiązane – dla każdego z oferowanych oraz wprowadzanych do sprzedaży produktów – do zamieszczania w rocznym raporcie o stanie portfela ubezpieczeń informacji na temat „zmian w założeniach technicznych produktu, dokonanych w trakcie ostatniego roku kalendarzowego, wraz z uzasadnieniem tych zmian oraz określeniem wpływu, jaki będą miały dokonane zmiany na wielkość zobowiązań zakładu ubezpieczeń”.¹ Ponadto aktuariusz zakładu ubezpieczeń został zobowiązany do wydania opinii co do „zgodności założeń technicznych, użytych do konstrukcji produktu, z faktycznymi danymi uzyskanymi w toku prowadzonej działalności ubezpieczeniowej w ostatnim roku kalendarzowym”, z uwzględnieniem między innymi założeń dotyczących stóp zwrotu z aktywów oraz umieralności. Analiza i prognozowanie wielkości zobowiązań i należności zakładu ubezpieczeń wynikających z zawartych umów ubezpieczenia są nieodłącznymi elementami analizy zyskowności produktów ubezpieczeniowych. Można zatem uznać, że realizacja wymagań określonych w rozporządzeniu Ministra Finansów dotyczącym raportu o stanie portfela obli-guje zakłady ubezpieczeń do corocznego przeprowadzania analiz zyskowności.

Testy zyskowności produktów ubezpieczeń na życie wchodzą w wielu krajach do kanonu wykształcenia aktuarium stanowiąc istotny element na egzaminach aktuarialnych. Pierwsze materiały do studiowania testów zyskowności opracowano w Institute of Actuaries w 1986 roku [Hare i McCutcheon 1991]. Testy zyskowności odgrywają również ważną rolę w kształceniu kadry menedżerskiej zakładów ubezpieczeń odpowiedzialnej za zarządzanie ryzykiem, w szczególności zarządzanie dopasowywaniem aktywów i zobowiązań [Conant i in. 1996].

Celem pracy jest przedstawienie modelu służącego badaniu zyskowności produktów ubezpieczeń na życie oraz przykładowych rezultatów uzyskanych w drodze analizy scenariuszy i symulacji. Prezentowany w pracy model umożliwia analizę następujących produktów ubezpieczeń na życie:

- tradycyjnych: dożywotniego ubezpieczenia na wypadek śmierci, terminowego ubezpieczenia na wypadek śmierci, czystego ubezpieczenia na dożycie, mieszanego ubezpieczenia na dożycie,
- uniwersalnych: uniwersalnego mieszanego ubezpieczenia na dożycie.

¹ *Rozporządzenie Ministra Finansów z dnia 16 grudnia 2003 roku w sprawie zakresu informacji zawartych w rocznym raporcie o stanie portfela ubezpieczeń*, Dz.U. z dnia 29 grudnia 2003 roku Nr 222 Poz. 2203, § 3 pkt.4 ust. 9.

W analizie zyskowności uwzględnia się szereg czynników i przyjmuje wiele założeń mających wpływ na uzyskiwane wyniki. Do podstawowych czynników należą między innymi: rzeczywista i prognozowana sytuacja społeczno-ekonomiczna i demograficzna (uwzględniane np. poprzez stopę zwrotu z inwestycji, stopę bezrobocia, inflację, śmiertelność). W analizie muszą być przyjęte założenia między innymi co do oczekiwanych zysków, kosztów, aktualnej strategii selekcji ryzyka i rozwoju produktów ubezpieczeniowych.

Testy zyskowności przeprowadzane są w oparciu o modele stanowiące część większych modeli opisujących całokształt działalności zakładu ubezpieczeń. Związane są one z modelami działalności technicznej. Przeprowadza się je zwykle w odniesieniu do ustalonych produktów ubezpieczeń na życie dla ustalonej kohorty ubezpieczonych. Testy zyskowności portfela ubezpieczeniowego danego produktu wymagają uwzględnienia struktury ubezpieczonych osób np. ze względu na płeć, wiek, i inne istotne czynniki określające ryzyko ubezpieczeniowe takie, jak np. palenie tytoniu lub niepalenie, wykonywany zawód. O ile testy zyskowności produktów pozwalają określić charakterystyczne cechy tych produktów i wpływ przyjmowanych warunków polisowych na zyskowność, o tyle testy zyskowności portfeli ubezpieczeniowych muszą uwzględniać cechy charakterystyczne tych portfeli w konkretnym zakładzie ubezpieczeń.

1.2. MODELE STÓP PROCENTOWYCH ORAZ MODELE WYMIERALNOŚCI

W ubezpieczeniach na życie podstawowymi czynnikami mającymi decydujący wpływ na działalność zakładu ubezpieczeń są stopy procentowe oraz przyjmowane prawdopodobieństwa zgonów.

Bardzo ważnym elementem modelu symulacyjnego, którego zadaniem jest wycena produktu ubezpieczeniowego, jest wybór odpowiedniego modelu stopy procentowej (*risk-free rate of interest*). Stopa procentowa jest bowiem wykorzystywana nie tylko do dyskontowania przyszłych przepływów, ale także, w wielu typach ubezpieczeń, stopa procentowa wpływa na wysokość przepływu pojawiającego się w danym momencie.

W literaturze finansowej (np. [Cairns 2004]) bardzo często za modele stopy procentowej przyjmuje się jednoczynnikowe modele dyfuzyjne, tzn. zakłada się, że dynamika procesu stopy procentowej $r(t)$ opisana jest stochastycznym równaniem różniczkowym postaci

$$dr(t) = a(t, r(t))dt + b(t, r(t))dW(t) \quad (1)$$

gdzie t oznacza czas, $W(t)$ - jednowymiarowy ruch Browna, natomiast $a(\cdot)$ oraz $b(\cdot)$ - funkcje spełniające pewne techniczne założenia [Jakubowski i in. 2003].

W prezentowanym modelu zyskowności ubezpieczeń na życie wykorzystany został model Coxa, Ingersolla i Rossa (dalej oznaczany jako model „*CIR*”). Przyjęte zostało założenie, że dynamika procesu $r(t)$ jest dana równaniem

$$dr(t) = (a - br(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t) \quad (2)$$

gdzie a, b, σ są dodatnimi stałymi.

Po zdyskretyzowaniu oraz uwzględnieniu warunku, że stopa procentowa nie może być mniejsza od zera, model *CIR* może być użyty w badaniu symulacyjnym, w celu wygenerowania przyszłych scenariuszy dynamiki stopy procentowej. W badaniach mogą być wykorzystywane również deterministyczne scenariusze dynamiki stopy procentowej, które odzwierciedlają subiektywne przekonania użytkownika modelu, co do przyszłego rozwoju rynków finansowych.

Model *CIR* został zastosowany z uwagi na następujące jego właściwości [Ahlgrim i in. 1999]:

- modeluje krótkoterminową stopę spot (jest to odniesiona do okresu rocznego oczekiwana stopa zwrotu w ciągu następnego ustalonego krótkiego okresu);
- zakłada powrót krótkoterminowej stopy spot do długookresowej średniej (po wzroście stopy procentowej następuje jej spadek i odwrotnie);
- stopy procentowe przyjmują wartości nieujemne¹;
- model pozwala na szybkie i łatwe określenie struktury terminowej stóp procentowych, cen obligacji o różnych terminach zapadalności oraz cen akcji²;
- zmienność stóp jest proporcjonalna do poziomu stóp w danym okresie.

Model *CIR* nie stwarza problemów implementacyjnych, a jego dopasowanie do danych historycznych daje zadowalające rezultaty³.

W opracowanym modelu badania zyskowności ubezpieczeń na życie wykorzystywane są cztery teoretyczne modele wymieralności: de Moivre’a, Gompertza, Makehama i Weibulla oraz prawdopodobieństwa zgonów z tablic trwania życia z lat 1995-2002 opublikowanych przez Główny Urząd Statystyczny⁴.

¹ Należy zauważyć, że właściwość ta jest zachowana w przypadku ciągłych stóp procentowych. Może się jednak zdarzyć, że dla modelu zdyskretyzowanego, stosowanego w symulacjach, stopy przyjmą wartości ujemne.

² Model *CIR*, wyprowadzając strukturę terminową z jednej krótkoterminowej stopy procentowej, zakłada idealną korelację pomiędzy wszystkimi obligacjami. Założenie to jest często krytkowane jako założenie nierealistyczne, znacznie ograniczające dynamikę struktury terminowej. Nie jest ono istotne w przypadku zastosowania modelu *CIR* do symulacji długoterminowych, takich jak omawiana.

³ Model *CIR* zastosowany do modelowania stóp procentowych dla danych historycznych z rynku amerykańskiego z okresu 45 lat (kwiecień 1953 – lipiec 1998) daje rezultaty bliższe danym empirycznym, niż inne modele [Ahlgrim i in. 1999].

⁴ Tablice trwania życia dostępne są na stronie internetowej GUS www.stat.gov.pl.

2. OPIS TESTU ZYSKOWNOŚCI

2.1. PARAMETRY MODELU

Model służący przeprowadzaniu testów zyskowności składa się z równania wyniku technicznego oraz równań zmiennych i parametrów określających wynik techniczny. W omawianym w niniejszej pracy modelu analizie poddawany jest oczekiwany wynik techniczny przedsiębiorstwa ubezpieczeniowego w każdym roku trwania rozpatrywanej umowy ubezpieczenia na życie w zależności od wartości szeregu parametrów ustalonych przez użytkownika modelu. Parametry definiowane przez użytkownika zostały przedstawione w tabeli 1.

Tab. 1. Parametry modelu definiowane przez użytkownika

Parametry ogólne (dot. całego przedsiębiorstwa)
<ul style="list-style-type: none"> • maksymalna techniczna stopa procentowa (i_T), • stopa zwrotu z inwestycji w roku m obowiązywania umowy ubezpieczenia ($i_{p,m}$), • stopa służąca do dyskontowania w roku m obowiązywania umowy ubezpieczenia ($i_{d,m}$), • stopa rezerw w roku m obowiązywania umowy ubezpieczenia ($i_{rez,m}$), • stopa inflacji w roku m obowiązywania umowy ubezpieczenia ($i_{inf,m}$), • numer scenariusza startowego stóp procentowych, • liczba symulacji (w przypadku stochastycznych scenariuszy stóp procentowych) • liczba ubezpieczonych ogółem w portfelu ubezpieczeniowym w momencie rozpoczęcia analizy, • udział poszczególnych produktów w portfelu ubezpieczeniowym (maksymalnie 4 produkty).
Parametry związane z poszczególnymi produktami
<ul style="list-style-type: none"> • Wiek ubezpieczonych: 0–80 lat. • Płeć ubezpieczonych: mężczyzna / kobieta. • Dodatkowe informacje dotyczące zdrowia ubezpieczonego: palący / niepalący. • Okres trwania ubezpieczenia: maksymalnie do 101 lat (może być odroczony o ustaloną liczbę lat). • Suma ubezpieczenia <ul style="list-style-type: none"> – Wysokość początkowej sumy ubezpieczenia: dowolna (w zł). – Sposób zmiany sumy ubezpieczenia w kolejnych latach (ustalony algorytm lub iteracyjnie). • Koszty: <ul style="list-style-type: none"> – Koszty akwizycji pierwszoroczne: proporcjonalne do składki brutto lub sumy ubezpieczenia, współczynnik proporcjonalności ograniczony (zellmeryzacja). – Koszty prowizji pośredników ubezpieczeniowych: proporcjonalne do składki brutto, współczynnik proporcjonalności dowolny (< 100%). – Koszty administracyjne: proporcjonalne do początkowej sumy ubezpieczenia, współczynnik proporcjonalności dowolny (< 100%). • Składki <ul style="list-style-type: none"> – Sposób płatności składek: jednorazowo, ratalnie (okres płacenia składek). – Wysokość płaconych składek: stała (możliwość zdefiniowania wysokości składki przyjętej w oparciu o wysokość składki brutto i netto) lub zmienna (w ubezpieczeniu uniwersalnym). • Śmiertelność: możliwość wyboru jednej z dwunastu tablic trwania życia (4 tablice wg teoretycznych praw wymieralności oraz 8 tablic GUS z lat 1995–2002).

- Rezygnacje: możliwość dowolnego zdefiniowania wysokości stóp rezygnacji w poszczególnych latach trwania ubezpieczenia oraz uzależnienia ich od stóp procentowych i stanu zdrowia ubezpieczonego.
- Rezerwy techniczno-ubezpieczeniowe: netto oraz brutto (uwzględniające efekt zellmeryzacji), obliczane w oparciu o zdefiniowaną przez użytkownika stopę rezerw.
- Opcje dodatkowe: możliwość dowolnego wyboru opcji dodatkowych
 - Opcja wykupu: możliwość zdefiniowania potrącenia przy wykupie oraz liczby lat, po których przysługuje wykup.
 - Opcja udziału ubezpieczonego w zysku: możliwość ustalenia sposobu podziału zysku, uzależnienia udziału w zysku od wybranej wysokości stopy procentowej lub stopy rezygnacji, możliwość ustalenia formy wypłaty udziału w zysku oraz wpływu opcji na przyszłe stopy rezygnacji.

2.2. WYNIK TECHNICZNY

Oczekiwany wynik techniczny z czynnej polisy ubezpieczeniowej obliczony w roku m , dla $m=1, \dots, n$, wynosi

$$\begin{aligned}
 WT_m = & (P_m + W_{m-1} - C_m)(1 + i_{p,m}) - q_{x+m-1}D_m - p_{x+m-1}S_m \\
 & - p_{x+m-1}s_{x+m}SV_m - p_{x+m-1}(1 - s_{x+m})(W_m + B_m)
 \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie:

X – zmienna losowa oznaczająca wiek ubezpieczonego w momencie śmierci,

x – wiek ubezpieczonego w momencie zawarcia umowy ubezpieczenia,

${}_m p_x = \Pr(X > x + m | X > x)$ – prawdopodobieństwo, że osoba w wieku x przeżyje jeszcze co najmniej m lat, to znaczy osiągnie wiek $x+m$ lat,

${}_m q_x = \Pr(X \leq x + m | X > x)$ – prawdopodobieństwo, że osoba w wieku x nie przeżyje m lat, tzn. nie osiągnie wieku $x+m$ lat,

P_m – wysokość składki ustalonej do zapłacenia przez ubezpieczonego w m -tym roku trwania umowy ubezpieczenia,

C_m – koszty (akwizycji, inkasa i administracyjne łącznie) poniesione w danym roku trwania umowy ubezpieczenia,

$i_{p,m}$ – wysokość stopy zwrotu z inwestycji w roku m trwania umowy ubezpieczenia,

W_m - rezerwa brutto obliczona na moment m , dla $m = 0, 1, \dots, n - 1$, zgodnie ze wzorem (17) oraz $W_n = 0$,

D_m – wysokość świadczenia z tytułu śmierci ubezpieczonego obowiązująca w roku m trwania umowy ubezpieczenia,

S_m – wysokość świadczenia z tytułu dożycia przez ubezpieczonego wieku $x+m$ lat, obowiązująca w roku m trwania umowy ubezpieczenia,

s_m – stopa rezygnacji w roku m trwania umowy ubezpieczenia,

SV_m – wysokość wykupu przysługującego ubezpieczonemu w roku m trwania umowy ubezpieczenia,

B_m – wysokość dywidendy przysługującej ubezpieczonemu w roku m trwania umowy ubezpieczenia,

Oczekiwany wynik techniczny obliczony w roku m , dla $m=1, \dots, n$, wynosi

$$EWT_m = {}_{m-1}\tilde{p}_x WT_m \quad (4)$$

gdzie

$${}_0\tilde{p}_x = 1, \quad {}_{m-1}\tilde{p}_x = {}_{m-1}p_x \prod_{k=1}^{m-1} (1 - s_{x+k}), \quad \text{dla } m \geq 2.$$

2.3. WSKAŹNIKI RENTOWNOŚCI

Zyskowność poszczególnych produktów ubezpieczeń na życie oceniana może być za pomocą wielu kryteriów (wskaźników rentowności). Dla ustalonej kohorty ubezpieczonych rentowność ubezpieczenia ustalana jest w oparciu między innymi o zagregowaną wartość oczekiwaną wyniku technicznego EWT_m . W omawianym modelu istnieje możliwość obliczenia wartości następujących wskaźników rentowności danego ubezpieczenia na życie: wartości obecnej netto (NPV), marży zysku, wewnętrznej stopy zwrotu (IRR), kapitału początkowego, marży wydatków, marży czasu, marży ryzyka.

Wartość NPV obliczana jest jako suma oczekiwanych wyników technicznych w poszczególnych latach trwania kontraktu ubezpieczeniowego zdyskontowanych na moment jego zawarcia, to znaczy

$$NPV = \sum_{m=1}^n \prod_{k=1}^m (1 + i_{d,k})^{-1} EWT_m \quad (5)$$

Za stopę użytą do dyskontowania w roku m przyjmuje się zdefiniowaną przez użytkownika wartość stopy $i_{d,m}$, przy warunku, że $i_{d,m} \geq i_{p,m}$.

Marża zysku obliczana jest jako stosunek obecnej wartości oczekiwanych przyszłych zysków (strat) do obecnej wartości oczekiwanych przyszłych składek (przy stopie $i_{d,m}$ wykorzystanej do dyskontowania).

Wewnętrzna stopa zwrotu IRR jest równa hipotetycznej stopie procentowej (przy założeniu, że byłaby ona stała przez wszystkie lata obowiązywania kontraktu ubezpie-

zeniowego), przy której wartość NPV jest równa zero. Przy obliczaniu IRR skorzystano z wbudowanej funkcji arkusza kalkulacyjnego MS EXCEL.

Kapitał początkowy jest równy sumie, jaką zakład ubezpieczeń musiałby dodatkowo pozyskać w momencie zawarcia umowy ubezpieczenia, aby wartość NPV była równa zero.

Marża wydatków określona jest jako stosunek poszczególnych kategorii oczekiwanych ujemnych przepływów zakładu ubezpieczeń zdyskontowanych na moment zawarcia umowy do oczekiwanych składek zdyskontowanych na ten moment (przy stopie procentowej służącej do dyskontowania w roku m równej $i_{d,m}$).

Ujemne przepływy obejmują:

- wypłaty ogółem (równe sumie przyszłych świadczeń z tytułu zgonu, dożycia, wykupów i poniesionych kosztów),
- wypłaty świadczeń ogółem (równe sumie świadczeń z tytułu zgonu i dożycia),
- wypłaty świadczeń z tytułu zgonu,
- wypłaty świadczeń z tytułu dożycia,
- wykupy,
- koszty (równe sumie kosztów akwizycji pierwszorocznej, przyszłych kosztów inkasa i kosztów administracyjnych.)

Marża czasu oznacza iloraz średniego czasu wypłaty świadczeń do średniego czasu napływu składek.

Niech SW_m , dla $m=1, \dots, n$, oznacza oczekiwaną wartość wypłaconych świadczeń z tytułu czynnej polisy w roku m równą

$$SW_m = p_{x+m-1}S_m + q_{x+m-1}D_m + p_{x+m-1}s_{x+m}SV_m \quad (6)$$

Niech ponadto

$$SW = \sum_{m=1}^n \prod_{k=1}^m (1 + i_{d,k})^{-1} {}_{m-1}\tilde{p}_x SW_m \quad (7)$$

Wówczas średni czas wypłaty świadczeń określamy jako:

$$E(T_{SW}) = \sum_{m=1}^n m \frac{\prod_{k=1}^m (1 + i_{d,k})^{-1} {}_{m-1}\tilde{p}_x SW_m}{SW} \quad (8)$$

wariancję czasu wypłaty świadczeń

$$\text{Var}(T_{SW}) = E(T_{SW}^2) - [E(T_{SW})]^2 \quad (9)$$

Niech ponadto

$$P = \sum_{m=1}^n \prod_{k=1}^{m-1} (1 + i_{d,k})^{-1} {}_{m-1} \tilde{p}_x P_m \quad (10)$$

Wówczas przyjmujemy, że średni czas napływu składek jest równy:

$$E(T_P) = \sum_{m=1}^n m \frac{\prod_{k=1}^{m-1} (1 + i_{d,k})^{-1} {}_{m-1} \tilde{p}_x P_m}{P} \quad (11)$$

natomiast wariancja czasu napływu składek

$$\text{Var}(T_P) = E(T_P^2) - [E(T_P)]^2 \quad (12)$$

Marża czasu równa $\frac{E(T_{SW})}{E(T_P)}$ określa ile razy przeciętny czas wypłaty świadczeń

jest dłuższy od czasu napływu składki. Parametr ten ma istotne znaczenie przy ustalaniu polityki inwestycyjnej.

Marża ryzyka zdefiniowana została jako iloraz współczynników zmienności losowej czasu wypłaty świadczeń i czasu napływu składek. Współczynniki zmienności losowej należą do klasycznych miar ryzyka. Zdefiniowana marża ryzyka oznacza więc w jakim stopniu ryzyko związane z wypłatą świadczeń przewyższa ryzyko związane z napływem składek.

3. OPIS TESTOWANYCH PRODUKTÓW

3.1. UBEZPIECZENIA NA ŻYCIE TRADYCYJNE ORAZ UNIWERSALNE

Prezentowany w niniejszej pracy model może być wykorzystany do testowania zyskowności produktów ubezpieczeniowych tradycyjnych oraz uniwersalnych.

Tradycyjnym ubezpieczeniem na życie nazywamy produkt, w którym wysokości sum ubezpieczenia oraz składek lub algorytmy ich wyznaczania są ustalane w momencie zawierania umowy i obowiązują (niezmienione) przez cały okres trwania umowy. Do tradycyjnych ubezpieczeń na życie zalicza się: dożywotnie i terminowe

ubezpieczenie na wypadek śmierci, ubezpieczenie czyste na dożycie oraz ubezpieczenie mieszane na dożycie.

Uniwersalnym ubezpieczeniem na życie nazywamy produkt, w którym wysokości sum ubezpieczenia oraz składek mogą zmieniać się każdego roku, a decyzję o zmianie tych parametrów podejmuje sam ubezpieczony. Przy kalkulacji składek oraz rezerw przyjmuje się jednak założenie, że parametry ustalone przez ubezpieczonego, na początku kolejnego roku, pozostaną niezmiennione do końca trwania umowy.

3.2. SKŁADKI NETTO I BRUTTO

Niezależnie od rodzaju ubezpieczenia, składki netto, płacone przez ubezpieczonego w kolejnych latach trwania umowy, oblicza się korzystając z zasady równoważności. Zasada równoważności (bilansu aktuarialnego) oznacza, że wartość oczekiwana, zdyskontowanych na moment zawarcia umowy, przepływów z tytułu śmierci jest równa wartości oczekiwanej, zdyskontowanych na moment zawarcia umowy, przepływów z tytułu przeżycia. Zasadę równoważności [Gerber 1997] możemy zapisać następującym równaniem:

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_{m+1} v^{m+1} {}_m p_x q_{x+m} = \sum_{m=0}^{\infty} \pi_m v^m {}_m p_x \quad (13)$$

gdzie:

b_m jest wysokością świadczenia z tytułu śmierci, które zakład ubezpieczeń wypłaci, jeżeli ubezpieczony umrze w roku m , czyli $b_m = D_m$ dla $m = 1, 2, \dots, n$, oraz $b_m = 0$ dla $m > n$,

π_m jest wysokością przepływu, który pojawi się w momencie m na skutek dożycia przez ubezpieczonego do momentu m , dla $m = 0, 1, \dots$,

$v = \frac{1}{1+i_T}$ jest stałym w czasie czynnikiem dyskontującym przepływy pieniężne.

Zasada równoważności opisana powyższym równaniem pozwala wyznaczyć ciąg składek netto $\{P_m^{netto}\}_{m=1}^n$ dla dowolnie skonstruowanego produktu ubezpieczeniowego.

Należy zwrócić uwagę, że ciąg płaconych składek $\{P_m^{netto}\}_{m=1}^n$ nie jest równoważny z ciągiem przyszłych przepływów pieniężnych $\{\pi_m\}_{m=0}^{\infty}$. Ciąg $\{\pi_m\}_{m=0}^{\infty}$ uwzględnia bowiem nie tylko przyszłe składki netto, ale także świadczenie $\{S_m\}_{m=1}^n$ wynikające z przeżycia (uwaga: w równaniu są one zapisywane ze znakiem minus!).

Jako przykład, rozważymy terminowe n -letnie ubezpieczenie mieszane na dożycie, opłacane rocznymi składkami netto o stałej wysokości P , z którego w momencie

śmierci wypłacone zostanie D , natomiast w momencie przeżycia n lat S . Składkę netto w tym ubezpieczeniu możemy obliczyć stosując metodę równoważności, gdzie $\pi_0 = \pi_1 = \dots = \pi_{n-1} = P, \pi_n = -S, \pi_m = 0, m > n, b_1 = b_2 = \dots = b_n = D, b_m = 0, m > n$.

Składka netto służy wyłącznie do pokrycia przyszłych świadczeń z tytułu ubezpieczenia. Nie należy jednak zapominać, że zakład ubezpieczeń ponosi dodatkowe koszty z tytułu swojej działalności i zarządzania polisą. Tym samym zakład ubezpieczeń zmuszony jest pobierać od ubezpieczonego składkę brutto.

Składkę brutto można przedstawić jako sumę czterech „składek”:

$$P^{brutto} = P^{netto} + P^\alpha + P^\beta + P^\gamma \tag{14}$$

gdzie $P^\alpha, P^\beta, P^\gamma$ są składkami, które mają zrównoważyć, w aktuarialnym sensie (zgodnie z zasadą równoważności), ponoszone w kolejnych latach trwania umowy wydatki związane z kosztami akwizycji (składka P^α), kosztami prowizji pośredników ubezpieczeniowych (składka P^β) oraz kosztami administracyjnymi (składka P^γ).

3.3. REZERWA NETTO I BRUTTO

Regulacje prawne nakazują tworzenie rezerw, z zachowaniem ostrożności, w wysokości ustalonej metodą prospektywną. Dopuszcza się stosowanie metody retrospektywnej pod warunkiem, że daje ona wartości nie niższe od wartości rezerwy ustalonej metodą prospektywną lub gdy dla danej umowy ubezpieczenia nie jest możliwe zastosowanie metody prospektywnej.

Rezerwa netto na moment $m, {}_mV$, według metody prospektywnej [Gerber 1997], obliczana jest zgodnie ze wzorem:

$$\begin{aligned} &{}_0V = 0, \\ &{}_mV = \sum_{j=0}^{\infty} \prod_{x=m+1}^{m+j+1} (1 + i_{rez,x})^{-1} b_{m+j+1} {}_jP_{x+m} q_{x+m+j} \\ &\quad - \sum_{j=0}^{\infty} \prod_{x=m+1}^{m+j} (1 + i_{rez,x})^{-1} \pi_{m+j} {}_jP_{x+m} \text{ dla } m \geq 1 \end{aligned} \tag{15}$$

gdzie $i_{rez,m}$ jest techniczną stopą użytą do dyskontowania rezerw w roku m . Łatwo zauważyć, że rezerwa netto obliczona na moment m jest czynnikiem bilansującym, w sensie aktuarialnym, przyszłe przepływy z tytułu śmierci oraz przyszłe przepływy z tytułu przeżycia.

Powyższy wzór można przekształcić do postaci, która pozwala na obliczanie rezerw netto w sposób rekurencyjny, przy czym rekurencja jest wsteczna.

$$\begin{aligned} {}_nV &= S_n, \\ ({}_mV + \pi_m)(1 + i_{rez,m+1}) &= b_{m+1} q_{x+m} + {}_{m+1}V p_{x+m} \text{ dla } m = n-1, n-2, \dots, 1, \\ {}_0V &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

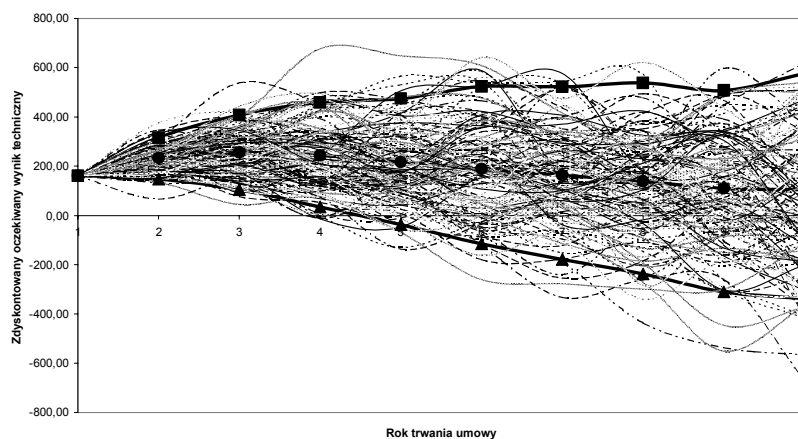
Rezerwę brutto W , możemy przedstawić jako sumę czterech składników:

$$W = V + V^\alpha + V^\beta + V^\gamma \quad (17)$$

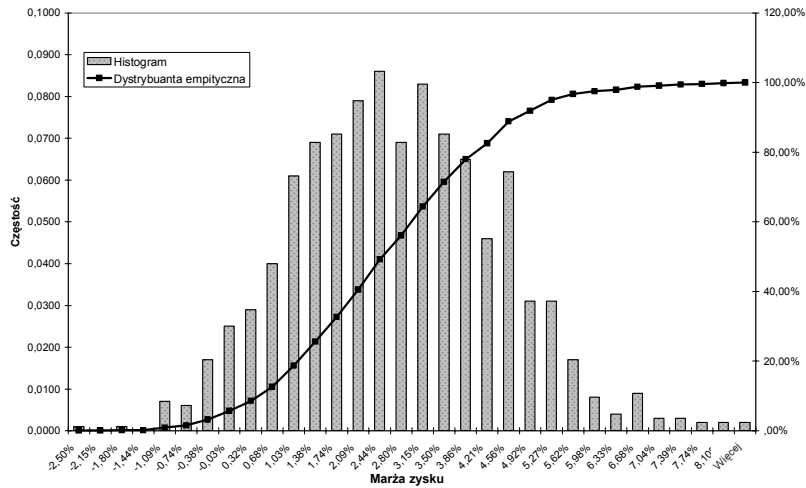
gdzie $V^\alpha, V^\beta, V^\gamma$ obliczane są zgodnie ze wzorem (15), jako czynniki bilansujące, w sensie aktuarialnym, przyszłe koszty akwizycji, prowizji pośredników ubezpieczeniowych, administracyjne oraz przyszłe wpływy ze składek $P^\alpha, P^\beta, P^\gamma$.

4. PRZYKŁADY WYKORZYSTANIA MODELU

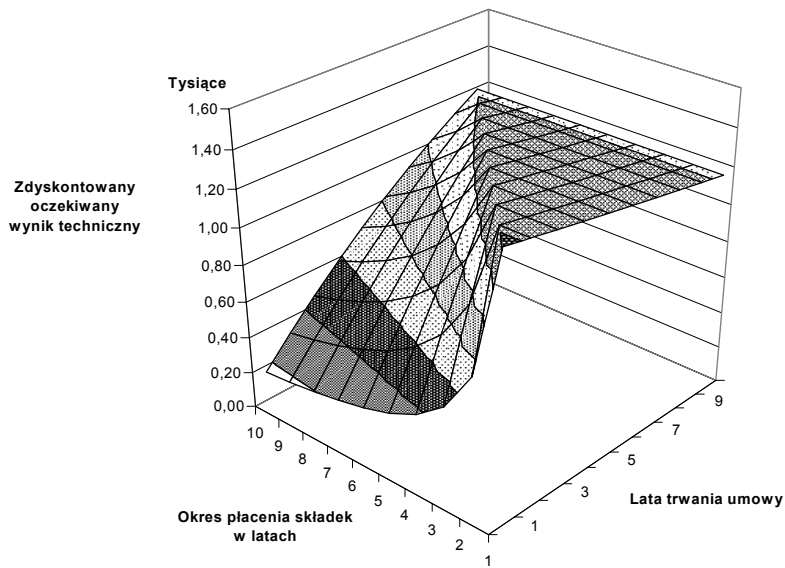
Prezentowany w pracy model pozwala analizować wpływ zmian wielu parametrów na wybrane wskaźniki rentowności produktów ubezpieczeń na życie. Poniżej zaprezentowane zostały przykładowe wyniki analiz terminowego (dziesięcioletniego) mieszanego ubezpieczenia na dożycie.



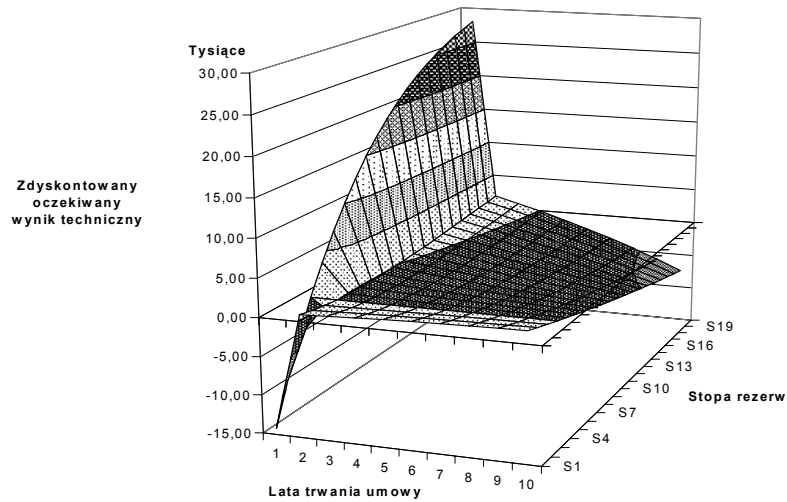
Rys. 1. Zdyskontowany oczekiwany wynik techniczny w kolejnych latach trwania umowy w zależności od scenariusza stopy procentowej



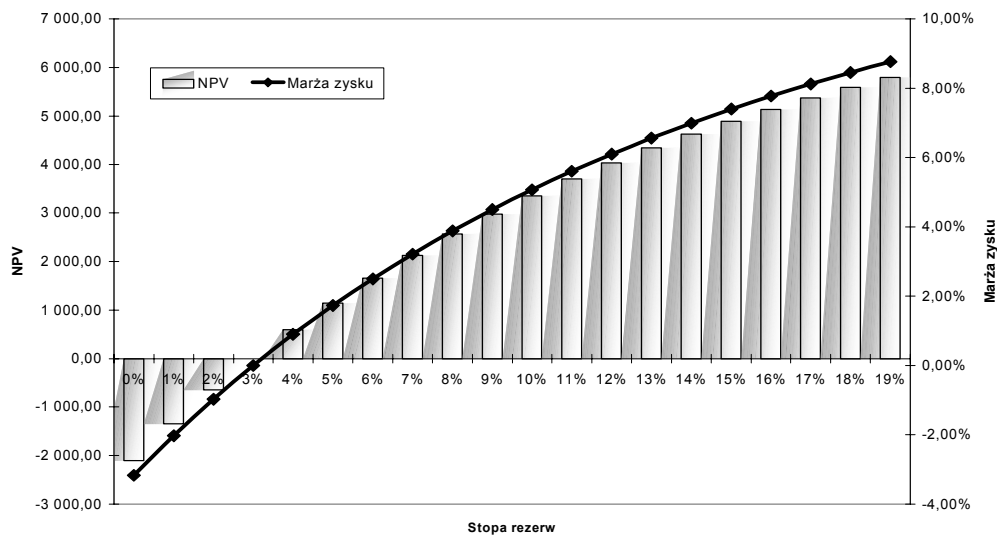
Rys. 2. Rozkład empiryczny marży zysku (dla 1000 scenariuszy stóp procentowych)



Rys. 3. Zdyskontowany oczekiwany wynik techniczny w poszczególnych latach trwania umowy w zależności od okresu płatności w latach



Rys. 4. Zdyskontowany oczekiwany wynik techniczny w poszczególnych latach trwania umowy w zależności od przyjętej stopy rezerw (NPV $>$ 0, stopa dyskonta $>$ stopa zwrotu)



Rys. 5. NPV i marża zysku w zależności od przyjętej stopy rezerw (przy stopie dyskonta wyższej niż stopa zwrotu i równej 6%)

Na rysunku 1 przedstawiona została zależność rentowności terminowego mieszanego ubezpieczenia na dożycie od scenariuszy stopy procentowej. Trajektorie stopy procentowej wygenerowane zostały przy pomocy modelu *CIR*. Dodatkowo na rysunku 1 przedstawiono średnie wartości zdyskontowane oczekiwanego wyniku technicznego oraz wartości percentyli rzędu 0,05 i 0,95.

Rysunek 2 przedstawia histogram oraz skumulowane częstości rozkładu empirycznego (dystrybuantę empiryczną) marży zysku uzyskanego na podstawie wygenerowanych 1000 scenariuszy stopy procentowej.

Na rysunkach 3 i 4 przedstawiono zależność zdyskontowanego oczekiwanego wyniku technicznego w poszczególnych latach trwania umowy ubezpieczenia od, odpowiednio, okresu płacenia składek i stopy procentowej rezerw. Wpływ stopy rezerw na *NPV* oraz marżę zysku ilustruje rysunek 5.

5. PODSUMOWANIE

Rynek ubezpieczeniowy w Polsce jest stosunkowo młody i wciąż znajduje się w fazie rozwoju. Wejście Polski do Unii Europejskiej oznacza zwiększenie konkurencji wśród zakładów ubezpieczeń (brak barier wejścia na polski rynek dla zagranicznych firm ubezpieczeniowych) oferując z drugiej strony korzyści z działania na jednolitym rynku ubezpieczeniowym. W tej sytuacji, analiza zyskowności i wypłacalności prowadzonej działalności staje się dla zakładów ubezpieczeń bardzo istotna. Z uwagi na powyższe, zadaniem, jakie postawili sobie autorzy artykułu, było skonstruowanie modelu służącego do badania zyskowności produktów ubezpieczeń na życie, zaś celem artykułu przedstawienie przyjętych w modelu założeń, podstawowych problemów związanych z budową takiego modelu, a także przykładowych rezultatów uzyskanych przy pomocy skonstruowanego modelu.

Skonstruowany model testu zyskowności produktów ubezpieczeń z pierwszej grupy działu I jest narzędziem bardzo elastycznym oraz wszechstronnym, które pozwala na szczegółową analizę zyskowności ze względu na zmianę wielu parametrów, zarówno dotyczących bezpośrednio produktów, jak i związanych z otoczeniem makroekonomicznym, w jakim zakład ubezpieczeń prowadzi działalność. Model umożliwia przeprowadzenie testu zyskowności całej szerokiej gamy indywidualnych (na jedno życie) produktów z grupy pierwszej działu I, o czym świadczy uwzględnienie uniwersalnego ubezpieczenia na życie. Ubezpieczenie uniwersalne zazwyczaj nie jest opisywane w literaturze dotyczącej testów zyskowności ubezpieczeń na życie.

Model testu zyskowności może z powodzeniem spełniać funkcję edukacyjną, pomagając w zrozumieniu istoty funkcjonowania poszczególnych produktów ubezpieczeń na życie oraz czynników mających wpływ na przepływy finansowe związane z danym produktem. Dzięki zastosowaniu powszechnie znanej aplikacji (Excel) i pro-

stego języka oprogramowania (Visual Basic), może być przez użytkownika łatwo modyfikowany i rozbudowywany o inne produkty (np. rentowe lub małżeńskie), kolejne parametry produktów (np. wynikające z prowadzonego underwritingu medycznego) lub wzbogacany o nowe modele czynników zewnętrznych (np. różne modele stopy procentowej).

LITERATURA

- AHLGRIM, K.C., D'ARCY, S.P., GORVETT, R.W. 1999. *Parametrizing Interest Rate Models*. Casualty Actuarial Society Forum; ss. 1–50.
- CAIRNS, A. 2004. Interest-Rate Models; [w:] *Encyclopaedia of Actuarial Science*. Wiley.
- CONANT, S., DESOUTTER, N.L., LONG, D.L., MACGROGAN, R. 1996. *Managing for Solvency and Profitability in Life and Health Insurance Companies*. LOMA, Atlanta.
- GERBER, H.U. 1997. *Life Insurance Mathematics*. Springer, Swiss Association of Actuaries, Zürich, Berlin, Heidelberg, New York (third edition).
- HARE, D.J.P., MCCUTCHEON, J.J. 1991. *An Introduction to Profit Testing*. Institute of Actuaries, London.
- JAKUBOWSKI, J., PALCZEWSKI, A., RUTKOWSKI, M., STETTNER, Ł. 2003. *Matematyka finansowa - instrumenty pochodne*. WNT, Warszawa.
- Rozporządzenie Ministra Finansów z dnia 16 grudnia 2003 roku w sprawie zakresu informacji zawartych w rocznym raporcie o stanie portfela ubezpieczeń*; Dz. U. z 2003 roku, nr 222, poz. 2203.